

第1讲 二次函数区间最值问题加油站

一、定轴定区间

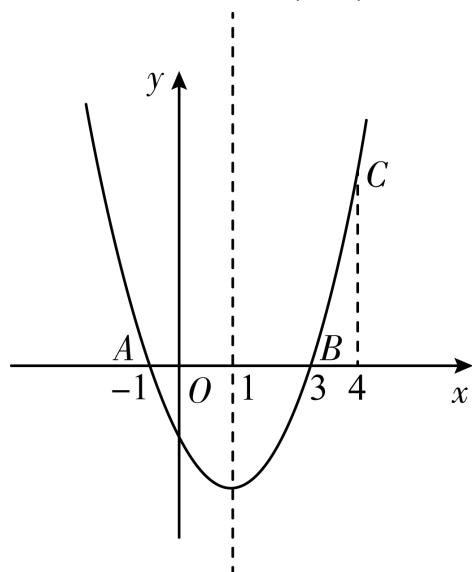
练习1

1. 2018年黑龙江大庆中考真题 ★★★

如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$ 、点 $B(3, 0)$ 、点 $C(4, y_1)$ ，若点 $D(x_2, y_2)$ 是抛物线上任意一点，有下列结论：

- ①二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的最小值为 $-4a$ ；
- ②若 $-1 \leq x_2 \leq 4$ ，则 $0 \leq y_2 \leq 5a$ ；
- ③若 $y_2 > y_1$ ，则 $x_2 > 4$ ；
- ④一元二次方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的两个根为 -1 和 $\frac{1}{3}$

其中正确结论的个数是()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 解：抛物线解析式为 $y = a(x+1)(x-3)$ ，

$$\text{即 } y = ax^2 - 2ax - 3a,$$

$$\therefore y = a(x-1)^2 - 4a,$$

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时，二次函数有最小值 $-4a$ ，所以 ① 正确；

$$\text{当 } x = 4 \text{ 时， } y = 9a - 4a = 5a,$$

$\therefore$ 若 $-1 \leq x_2 \leq 4$ ，则 $-4a \leq y_2 \leq 5a$ ，所以 ② 错误；

$\therefore$ 点 $C(4, 5a)$ 关于直线 $x = 1$ 的对称点为 $(-2, 5a)$ ，

∴若 $y_2 > y_1$, 则 $x_2 > 4$ 或 $x_2 < -2$, 所以 ③ 错误 ;

∵ $b = -2a$, $c = -3a$,

∴方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 可化为 $-3ax^2 - 2ax + a = 0$,

整理得 $3x^2 + 2x - 1 = 0$, 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$, 所以 ④ 正确 .

故选 : B .

【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

练习2

2. 2016~2017学年3月北京东城区北京市第二中学初三下学期月考第14题3分 ★★

抛物线 $y = x^2 - 5x$, 当 $0 \leq x \leq 3$ 时 , 对应的 y 的取值范围是 _____ .

【答案】 $-\frac{25}{4} \leq y \leq 0$

【解析】 ∵二次函数 $y = x^2 - 5x$ 中 , 对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$,

∴当 $x = \frac{5}{2}$ 时 , y 最小 ,

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \times \frac{5}{2} = -\frac{25}{4} ,$$

当 $x = 0$ 时 , y 最大 , 为 0 ,

$$\therefore -\frac{25}{4} \leq y \leq 0 .$$

【标注】【知识点】给定范围求二次函数最值

3. ★★★

已知函数 $y = -2x^2 - 4x + 7$, 根据下列 x 的范围求函数的最值 .

① $-3 \leq x \leq 0$; ② $-2 \leq x \leq 2$; ③ $0 \leq x \leq 4$; ④ $-3 \leq x \leq -0.5$; ⑤ $m \leq x \leq m+1$ (m 是实数) .

【答案】 ① $y_{\max} = 9$, $y_{\min} = 1$;

② $y_{\max} = 9$, $y_{\min} = -9$;

③ $y_{\max} = 7$, $y_{\min} = -41$;

④ $y_{\max} = 8.5$, $y_{\min} = 1$;

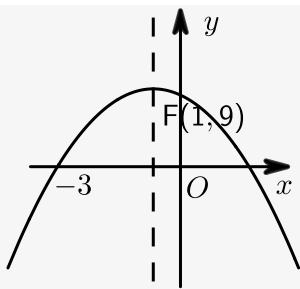
⑤ A . $y_{\max} = -2(m+2)^2 + 9$, $y_{\min} = -2(m+1)^2 + 9$;

B . $y_{\max} = 9$, $y_{\min} = -2(m+2)^2 + 9$;

C . $y_{\max} = 9$, $y_{\min} = -2(m+1)^2 + 9$;

D . $y_{\max} = -2(m+1)^2 + 9$, $y_{\min} = -2(m+2)^2 + 9$.

【解析】 将函数配方得 $f(x) = -2(x+1)^2 + 9$, ①由 $-3 \leq x \leq 0$, 如图



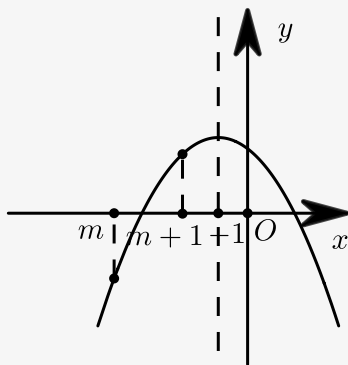
可知 $y_{\max} = f(-1) = 9$, $y_{\min} = f(-3) = 1$;

同理可得②由 $-2 \leq x \leq 2$, 有 $y_{\max} = f(-1) = 9$, $y_{\min} = f(2) = -9$;

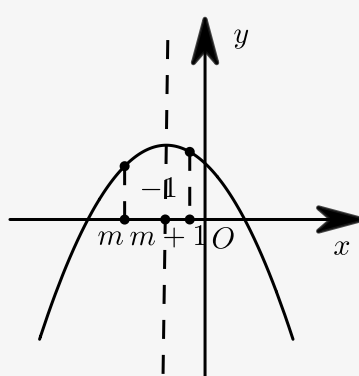
③由 $0 \leq x \leq 4$, 有 $y_{\max} = f(0) = 7$, $y_{\min} = f(4) = -41$;

④由 $-3 \leq x \leq -0.5$, 有 $y_{\max} = f(-0.5) = 8.5$, $y_{\min} = f(-3) = 1$;

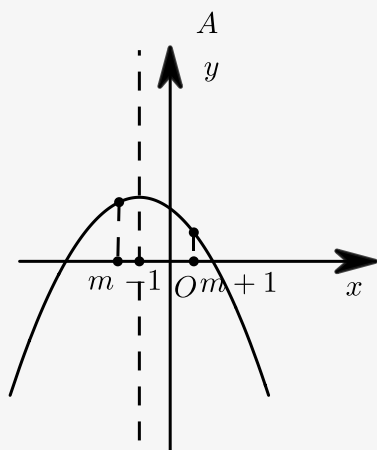
⑤当 $m \leq x \leq m+1$ (m 是实数) 时 , 有如下图的四种情况 :



$$m+1 < -1$$

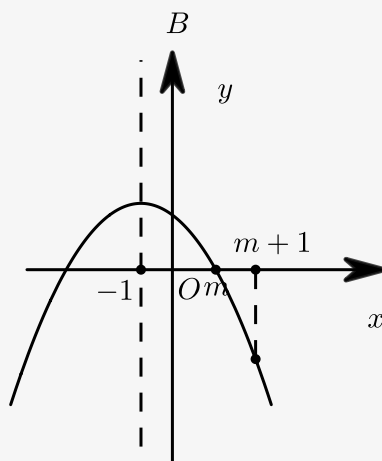


$$\begin{cases} m \leq -1 \leq m+1 \\ -1-m \geq m+1-(-1) \end{cases}$$



$$\begin{cases} m \leq -1 \leq m+1 \\ -1-m < m+1-(-1) \end{cases}$$

C



$$m > -1$$

D

由图 A 得 $m < -2$, 由图 B 得 $-2 \leq m \leq -1.5$,

由图 C 得 $-1.5 \leq m \leq -1$, 由图 D 得 $m > -1$,

所以得到 :

A . $y_{\max} = -2(m+2)^2 + 9$, $y_{\min} = -2(m+1)^2 + 9$;

B . $y_{\max} = 9$, $y_{\min} = -2(m+2)^2 + 9$;

$$C. y_{\max} = 9, y_{\min} = -2(m+1)^2 + 9;$$

$$D. y_{\max} = -2(m+1)^2 + 9, y_{\min} = -2(m+2)^2 + 9.$$

【标注】【知识点】定轴动区间函数的最值问题

练习3

4. 2018~2019学年湖南长沙开福区青竹湖湘一外国语学校初二下学期期末第25题 ★★★★★

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A 在抛物线 $y = x^2 + bx + c (b > 0)$ 上，且 $A(1, -1)$ 。

(1) 若 $b - c = 4$ ，求 b, c 的值。

(2) 若该抛物线与 y 轴交于点 B ，其对称轴与 x 轴交于点 C ，试求出 OB, OC 的数量关系。

(3) 将该抛物线平移，平移后的抛物线仍经过 $(1, -1)$ ，点 A 的对应点 $A_1(1 - m, 2b - 1)$ ，当 $m \geq -\frac{3}{2}$ 时，求平移后抛物线的顶点所能达到的最高点的坐标。

【答案】(1) $b = 1, c = -3$ 。

(2) $OB = 2 + 2OC$ 。

(3) $\left(\frac{3}{4}, -\frac{17}{16}\right)$ 。

【解析】(1) 把 $(1, -1)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ ，

可得 $b + c = -2$ ，

$$\text{解} \begin{cases} b + c = -2 \\ b - c = 4 \end{cases},$$

可得 $b = 1, c = -3$ 。

(2) 由 $b + c = -2$ ，得 $c = -2 - b$ ，

对于 $y = x^2 + bx + c$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = c = -2 - b$ ，

抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2}$ ，

所以 $B(0, -2 - b)$ ， $C\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$ ，

因为 $b > 0$ ，

所以 $OC = \frac{b}{2}$ ， $OB = 2 + b$ ，

所以 $OB = 2 + 2OC$ 。

(3) 由平移前的抛物线 $y = x^2 + bx + c$ ，

可得 $y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$ ，

即 $y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 2 - b$ ，

因为平移后 $A(1, -1)$ 的对应点为 $A_1(1 - m, 2b - 1)$ ，

可知，抛物线向左平移 m 个单位长度，

向上平移 $2b$ 个单位长度，

则平移后的抛物线解析式为 $y = \left(x + \frac{b}{2} + m\right)^2 - \frac{b^2}{4} - b + 2b$ ，

即 $y = \left(x + \frac{b}{2} + m\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 2 + b$ ，

把 $(1, -1)$ 代入，

得 $\left(1 + \frac{b}{2} + m\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 2 + b = -1$ ，

$\left(1 + \frac{b}{2} + m\right)^2 = \frac{b^2}{4} - b + 1$ ，

$\left(1 + \frac{b}{2} + m\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - 1\right)^2$ ，

所以 $1 + \frac{b}{2} + m = \pm \left(\frac{b}{2} - 1\right)$ ，

当 $1 + \frac{b}{2} + m = \frac{b}{2} - 1$ 时， $m = -2$ （不合题意，舍去）；

当 $1 + \frac{b}{2} + m = -\left(\frac{b}{2} - 1\right)$ 时， $m = -b$ ，

因为 $m \geq -\frac{3}{2}$ ，所以 $b \leq \frac{3}{2}$ ，

所以 $0 < b \leq \frac{3}{2}$ ，

所以平移后的抛物线解析式为 $y = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 2 + b$ ，

即顶点为 $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4} - 2 + b\right)$ ，

设 $p = -\frac{b^2}{4} - 2 + b$ ，即 $p = -\frac{1}{4}(b-2)^2 - 1$ ，

因为 $-\frac{1}{4} < 0$ ，所以当 $b < 2$ 时， p 随 b 的增大而增大，

因为 $0 < b \leq \frac{3}{2}$ ，

所以当 $b = \frac{3}{2}$ 时， p 取最大值为 $-\frac{17}{16}$ ，

此时，平移后抛物线的顶点所能达到的最高点坐标为 $\left(\frac{3}{4}, -\frac{17}{16}\right)$ 。

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次函数与坐标轴交点

【知识点】二次函数平移变换

【知识点】点在二次函数图象上

二、定轴动区间

练习4

5. 2018~2019学年福建福州鼓楼区福州励志中学初二下学期期末第10题4分 ★★

当 $a \leq x \leq a+1$ 时，函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的最小值为 4，则 a 的值为（ ）。

A. -2

B. 4

C. 4或3

D. -2或3

【答案】 D

【解析】 $y = x^2 - 2x + 1$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，

$$x^2 - 2x + 1 = 4,$$

解得 $x_1 = 3$ ， $x_2 = -1$ 。

①当 $a \leq x \leq a+1$ 在对称轴左侧时，

y 随 x 增大而减小，

所以当 $x = a+1$ 时， $y = 4$ ，

$$\therefore a+1 < 1,$$

$$\therefore a+1 = -1,$$

$$a = -2.$$

②当 $a \leq x \leq a+1$ 在对称轴右侧时，

y 随 x 的增大而增大，

所以当 $x = a$ 时， $y = 4$ ，

$$\therefore a > 1,$$

$$\therefore a = 3,$$

综上 $a = -2$ 或 $a = 3$ 。

【标注】 【思想】 函数思想

【能力】 运算能力

6. ★★

当 $a-1 \leq x \leq a$ 时，函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的最小值为 1，则 a 的值为 _____。

【答案】 0或3

【解析】 当 $y = 1$ 时，有 $x^2 - 2x + 1 = 1$ ，

解得： $x_1 = 0$ ， $x_2 = 2$ 。

$\therefore$ 当 $a-1 \leq x \leq a$ 时，函数有最小值 1，

$$\therefore a-1 = 2 \text{ 或 } a = 0,$$

$$\therefore a = 3 \text{ 或 } a = 0,$$

故答案为：0或3。

【标注】 【知识点】 给定范围求二次函数最值

7. ★★★

若函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 在 $a \leq x \leq a+2$ 时的最小值为 4，则 a 的值是多少？

【答案】 $\{-3, 3\}$.

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, 对称轴 $x = 1$,

$\therefore$ 区间 $[a, a + 2]$ 上的最小值为 3 ,

$\therefore$ 当 $1 \leq a$ 时 , $y_{\min} = f(a) = (a - 1)^2 = 4$, $a = -1$ (舍去) 或 $a = 3$,

当 $a + 2 \leq 1$ 时 , 即 $a \leq -1$, $y_{\min} = f(a + 2) = (a + 1)^2 = 4$, $a = 1$ (舍去) 或 $a = -3$,

当 $a < a < a + 2$ 时 , $y_{\min} = f(1) = 0 \neq 4$.

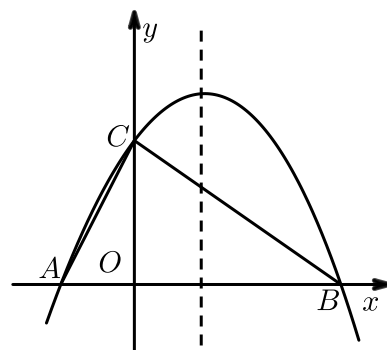
故 a 的取值集合为 $\{-3, 3\}$.

【标注】 【思想】 函数思想

【能力】 抽象概括能力

8. 2018~2019学年辽宁大连普兰店市初三上学期期末第26题12分 ★★★★★

在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 、点 B , 与 y 轴交于点 C , 抛物线的对称轴是直线 $x = 1$, 连接 BC 、 AC .



(1) 求 $S_{\triangle ABC}$ (用含有 a 的代数式来表示) .

(2) 若 $S_{\triangle ABC} = 6$, 求抛物线的解析式 .

(3) 在 (2) 的条件下 , 当 $-1 \leq x \leq m + 1$ 时 , y 的最大值是 2 , 求 m 的值 .

【答案】 (1) $-6a$.

(2) $y = -x^2 + 2x + 3$.

(3) $-\sqrt{2}$.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 点 B , 且对称轴为 $x = 1$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, 0)$,

$\therefore AB = |-1| + |3| = 4$,

$\because$ 点 C 为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 y 轴的交点 , 点 C 在 y 轴正半轴上 ,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, c)$,

$\therefore OC = c$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = 2c ,$$

把 $(-1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 中可得 :

$$a - b + c = 0 ,$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为 : } x = -\frac{b}{2a} = 1 ,$$

$$\therefore b = -2a ,$$

$$\therefore c = -3a ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = -6a .$$

$$(2) \therefore S_{\triangle ABC} = -6a = 6 ,$$

$$\therefore a = -1 ,$$

$$\therefore b = -2a , c = -3a ,$$

$$\therefore b = 2 , c = 3 ,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 : } y = -x^2 + 2x + 3 .$$

$$(3) \text{ 令 } y = 2 , \text{ 则 } -x^2 + 2x + 3 = 2 ,$$

$$\therefore -x^2 + 2x + 3 = 2 ,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 1 = 0 ,$$

$$\therefore x_1 = 1 - \sqrt{2} , x_2 = 1 + \sqrt{2} ,$$

$$\therefore \text{当 } -1 \leq x \leq m+1 \text{ 时 , } y \text{ 的最大值是 } 2 ,$$

$$\therefore m+1 = 1 - \sqrt{2} ,$$

$$\therefore m = -\sqrt{2} .$$

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

【知识点】二次函数与面积

【知识点】二次函数一般式

【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

练习5

9. ★★★★★

若函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}$ 在 $a \leq x \leq b$ 范围内的最小值为 $2a$, 最大值为 $2b$. 求 a 、 b 的值 .

【答案】 $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-2-\sqrt{17} \\ b=\frac{13}{4} \end{cases} .$

【解析】 函数的对称轴为 , 下面分三种情况加以讨论 :

(1) 若 $0 \leq a < b$ 时 , 即函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递减 , 有

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} = 2b \\ -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2} = 2a \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

(2) 若 $a < 0 < b$ 时, 则由函数图象知, $f(x)$ 在 $[a, 0]$ 上单调递增, 在 $[0, b]$ 上单调递减, 即区间过了对称轴, 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有最大值 $2b$, 即 $2b = \frac{13}{2}$, 得 $b = \frac{13}{4}$.

而函数的最小值在 $x = a$ 或 $x = b$ 处取得, 又由于 $a < 0$, 并且

$$f(b) = -\frac{1}{2}\left(\frac{13}{4}\right)^2 + \frac{13}{2} = \frac{39}{32} > 0,$$

故函数的最小值在 $x = a$ 处取得, 即 $f(a) = 2a$, 则有 $2a = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}$,

解得或 (舍去).

$$\text{从而 } \begin{cases} a = -2 - \sqrt{17} \\ b = \frac{13}{4} \end{cases}.$$

(3) 当 $a < b \leq 0$ 时, 即 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增, 有

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} = 2a \\ -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2} = 2b \end{cases}.$$

由于、是方程 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2} = 2x$ 的两个根, 又因为两根之积为负数, 即两根异号, 这与 $a < b \leq 0$ 矛盾, 故不存在.

$$\text{综上所述, 得 } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -2 - \sqrt{17} \\ b = \frac{13}{4} \end{cases}.$$

【标注】【知识点】定轴动区间函数的最值问题

10. 2020~2021学年辽宁大连西岗区初三上学期期末第10题3分 ★★★

已知函数 $y = x^2 + x - 1$, 当 $m \leq x \leq m + 2$ 时, $-\frac{5}{4} \leq y \leq 1$, 则 m 的取值范围是 ().

- A. $m \geq -2$ B. $-2 \leq m \leq -1$ C. $-2 \leq m \leq -\frac{1}{2}$ D. $m \leq -1$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 函数 $y = x^2 + x - 1$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{1}{2}$,

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, y 有最小值,

$$\text{此时 } y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4},$$

$\therefore$ 函数 $y = x^2 + x - 1$ 在 $m \leq x \leq 1$ 上的最小值是 $-\frac{5}{4}$,

$$\therefore m \leq -\frac{1}{2},$$

$\because$ 当 $x = 1$ 时, $y = 1 + 1 - 1 = 1$, 对称轴为直线 $x = -\frac{1}{2}$,

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{1}{2} - \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -2, y = 1,$$

$\therefore$ 函数 $y = x^2 + x - 1$ 在 $m \leq x \leq 1$ 上的最大值是 1,

$$\text{且 } m \leq -\frac{1}{2},$$

$$\therefore -2 \leq m \leq -\frac{1}{2}.$$

故选 C.

【标注】【知识点】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的增减性

独步天下练习1

11. 2021年北京朝阳区初三中考一模第27题7分 ★★★

在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + a - 4 (a \neq 0)$ 的对称轴是直线 $x = 1$.

(1) 求抛物线 $y = ax^2 + bx + a - 4 (a \neq 0)$ 的顶点坐标.

(2) 当 $-2 \leq x \leq 3$ 时， y 的最大值是 5，求 a 的值.

(3) 在 (2) 的条件下，当 $t \leq x \leq t+1$ 时， y 的最大值是 m ，最小值是 n ，且 $m - n = 3$ ，求 t 的值.

【答案】 (1) $(1, -4)$.

(2) 1.

(3) $t = -1$ 或 $t = 2$.

【解析】 (1) $\because$ 对称轴是直线 $x = 1$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore y = ax^2 - 2ax + a - 4 = a(x-1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 顶点坐标为 $(1, -4)$.

(2) $\because$ 当 $-2 \leq x \leq 3$ 时， y 的最大值是 5，

$\therefore$ 抛物线的顶点为图象的最低点，

$\therefore$ 当 $x = -2$ 时， $y = 5$.

代入解析式，求得 $a = 1$.

(3) ① 当 $t \leq 1 \leq t+1$ 时， $n = -4$ ， m 的最大值为 -3 ，

此时 $m - n = 1$ ，

不符合题意，舍去；

② 当 $t+1 < 1$ ，即 $t < 0$ 时，

$$m = (t-1)^2 - 4, n = (t+1-1)^2 - 4,$$

$$\therefore m - n = 3,$$

$$\therefore t = -1;$$

③ 当 $t > 1$ 时，

同理可得 $t = 2$ ，

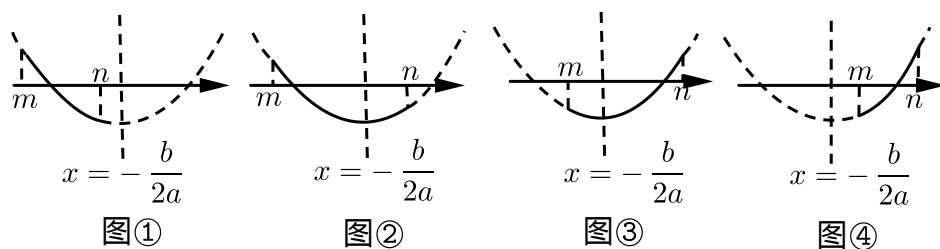
综上所述， $t = -1$ 或 $t = 2$.

12. 2019~2020学年湖南长沙开福区青竹湖湘一外国语学校初二下学期期末第25题 ★★★

阅读下面材料：

对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ ，当 $m \leq x \leq n$ 时，二次函数在何处取得最值？对此，我们可做如下探究：

当 $a > 0$ 时，观察图①到图④：



(1) 由图①可知，当 $x = n$ 时取最小值，当 $x = m$ 时取最大值，点离对称轴越近，函数值越小；

(2) 由图②、图③可知，当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时取最小值，点离对称轴越近，函数值越小；

(3) 由图④可知，当 $x = m$ 时取最小值，当 $x = n$ 时取最大值，点离对称轴越近，函数值越小。

结论：

1. 当抛物线开口向上时，抛物线上的点，离对称轴越近，其对应的函数值越小。

2. 若对称轴在自变量的取值范围内，则二次函数在 $x = -\frac{b}{2a}$ 时取最小值。

3. 若对称轴不在自变量的取值范围内，则二次函数在离对称轴最近的点处取得最小值。

请结合以上结论，解决下列问题：

(1) 已知二次函数 $y = x^2 - 2x - 2$ ，当 $-3 \leq x \leq 2$ 时，此时函数的最大值和最小值。

(2) 已知二次函数 $y = x^2 - 2x - 2$ 在 $m \leq x \leq m + 1$ 的范围内有最小值 $2m$ ，求出 m 的值。

(3) 二次函数 $y = x^2 - 2x - 2$ ，当 $m \leq x \leq n$ 时， $m \leq y \leq n (m \neq n)$ ，求出此时的 m ， n 的值。

【答案】(1) 13；-3。

(2) -1 或 $2 + \sqrt{6}$ 。

(3) 不存在。

【解析】(1) 由题意得，函数对称轴为 $x = 1$ ，

∴ 当 $x = 1$ 时， $y_{\min} = 1 - 2 - 2 = -3$ ，

当 $x = -3$ 时， $y_{\max} = (-3)^2 - 2 \times (-3) - 2 = 13$ ，

∴ 最大值为 13，最小值为 -3。

(2) 由题意得，函数对称轴为 $x = 1$ ，

① 当 $m + 1 < 1$ ，即 $m < 0$ 时，

当 $x = m + 1$ 时，

$y_{\min} = (m + 1)^2 - 2(m + 1) - 2 = 2m$ ，

解得 $m = -1$ 或 $m = 3$ (舍) ;

②当 $m > 1$ 时 ,

当 $x = m$ 时 ,

$$y_{\min} = m^2 - 2m - 2 = 2m ,$$

解得 $m = 2 + \sqrt{6}$ 或 $m = 2 - \sqrt{6}$ (舍) ;

③当 $m \leq 1 \leq m + 1$, 即 $0 \leq m \leq 1$ 时 ,

当 $x = 1$ 时 ,

$$y_{\min} = 1 - 2 - 2 = -3 = 2m ,$$

解得 $m = -\frac{3}{2}$ (舍) ,

综上 , $m = -1$ 或 $2 + \sqrt{6}$.

(3) 由题意得 , 函数对称轴为 $x = 1$,

①当 $m < n \leq 1$ 时 ,

$$\begin{cases} m^2 - 2m - 2 = n \\ n^2 - 2n - 2 = m \end{cases} ,$$

解得 $\begin{cases} m = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ n = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$ (舍) 或 $\begin{cases} m = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$ (舍) ;

②当 $1 \leq m < n$ 时 ,

$$\begin{cases} m^2 - 2m - 2 = m \\ n^2 - 2n - 2 = n \end{cases} ,$$

解得 $m = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, $n = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$,

又 $\because 1 < m < n$,

$\therefore$ 均不满足 ;

③当 $\frac{m+n}{2} \leq 1 < n$ 时 ,

$$\begin{cases} 1 - 2 - 2 = m \\ m^2 - 2m - 2 = n \end{cases} ,$$

解得 $\begin{cases} m = -3 \\ n = 13 \end{cases}$ (舍) ;

④当 $m < 1 < \frac{m+n}{2}$ 时 ,

$$\begin{cases} 1 - 2 - 2 = m \\ n^2 - 2n - 2 = n \end{cases} ,$$

解得 $\begin{cases} m = -3 \\ n = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$ (舍) 或 $\begin{cases} m = -3 \\ n = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$ (舍) ,

综上 : 不存在这样的 m , n 的值 .

【标注】【知识点】定轴动区间函数的最值问题

三、 动轴定区间

13. 2020~2021学年9月江苏苏州工业园区苏州星海实验中学初三上学期周测D卷第7题3分 ★★

已知二次函数 $y = -(x - h)^2$ (h 为常数), 当自变量 x 的值满足 $2 \leq x \leq 5$ 时, 与其对应的函数值 y 的最大值为 -1 , 则 h 的值为 ().

- A. 3或6 B. 1或6 C. 1或3 D. 4或6

【答案】 B

【解析】 二次函数 $y = -(x - h)^2$ (h 为常数) 的图象开口向下,

顶点为 $(h, 0)$, 函数最大值为 0.

因为当 $2 \leq x \leq 5$ 时, 与其对应的函数值 y 的最大值为 -1 ,

故 h 不能取 $2 \sim 5$ (含 2 与 5) 间的数.

当 $h < 2$ 时, 函数在 $x = 2$ 处取得最大值, 即 $-(2 - h)^2 = -1$,

解得 $h = 1$ 或 $h = 3$ (不合题意, 舍去);

当 $h > 5$ 时, 函数在 $x = 5$ 处取得最大值, 即 $-(5 - h)^2 = -1$,

解得 $h = 6$ 或 $h = 4$ (不合题意, 舍去).

综上所述, h 的值为 1 或 6.

故选 B.

【标注】 【知识点】 定区间动轴函数的最值问题

14. 2020~2021学年12月江苏南京玄武区南京外国语学校初三上学期月考第23题8分 ★★★

当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, 二次函数 $y = x^2 - 2mx + 2m^2 + 1$ 有最小值 4, 求实数 m 的值.

【答案】 $m = \sqrt{3}$ 或 $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

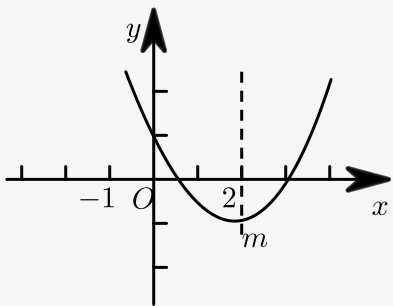
【解析】 由题可知, $y = (x - m)^2 + m^2 + 1$,

当 $m \geq 2$ 时, $x = 2$ 时, 有最小值,

即 $(2 - m)^2 + m^2 + 1 = 4$,

$\therefore 2m^2 - 4m + 1 = 0$,

$\therefore m = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} < 2$, 不符合.

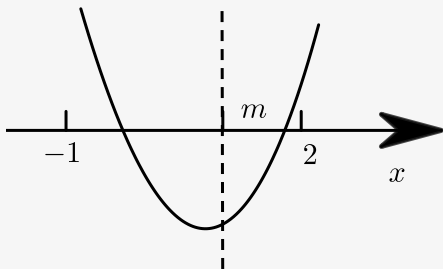


当 $-1 < m < 2$ 时, $x = m$ 时有最小值,

$$\text{即 } m^2 + 1 = 4,$$

$$\therefore m = \pm\sqrt{3},$$

则 $m = \sqrt{3}$, 符合.



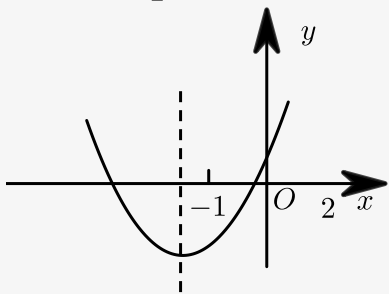
当 $m \leq -1$ 时, $x = -1$ 时有最小值,

$$\text{即 } (-1 - m)^2 + m^2 + 1 = 4,$$

$$\therefore m^2 + m - 1 = 0,$$

$$\therefore m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{则 } m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ 符合.}$$



综上: $m = \sqrt{3}$ 或 $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

【标注】【知识点】给定范围求二次函数最值

15. ★★★★★

已知函数 $y = ax^2 + (2a - 1)x - 3$ ($a \neq 0$), 当 $-\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 时, y 的最大值为 1, 求实数 a 的值.

【答案】 a 值为 $\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

【解析】 因为是求闭区间上的最值, 则最大值可能产生在抛物线的端点或顶点上.

函数 $f(x)$ 的最大值只能在 $x_1 = -\frac{3}{2}$ 或 $x_2 = 2$ 或 $x_0 = \frac{1-2a}{2a}$ 处取得.

①令 $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$, 解得 $a = -\frac{10}{3}$. 此时 $x_0 = \frac{1-2a}{2a} = \frac{23}{20} \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$,

故 $f(x)$ 的最大值不可能在 $x_1 = -\frac{3}{2}$ 处取得.

②令 $f(2) = 1$, 解得 $a = \frac{3}{4}$. 此时 $x_0 = \frac{1-2a}{2a} = -\frac{1}{3} < \frac{-\frac{3}{2}+2}{2}$, 故当 $a = \frac{3}{4}$ 时取得最大值 1.

③令 $f\left(\frac{1-2a}{2a}\right) = 1$, 解得 $a = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$, 要使 $f(x)$ 在 x_0 处取得最大值,

必须且只需 $a < 0$ 且 $x_0 \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$, 经检验, 只有 $a = -\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

综上所述, 所求的 a 值为 $a = \frac{3}{4}$ 或 $a = -\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

二次函数的区间最值问题 $f(x) = a(x-h)^2 + k (a > 0), x \in [p, q]$, 既是重点又是难点, 一般有三种情况:

(1)对称轴、区间都是给定的; (2)对称轴动, 区间固定; (3)对称轴定, 区间变动.

对这类问题的求解, 一般结合配方法, 根据函数的单调性、图象及分类讨论完成.

对于(2)、(3)两类, 通常要分对称轴在区间上(内)、对称轴在区间外两大类情况进行讨论. 若 $x = h \in [p, q]$, 则 $x = h$ 时, 有最小值 k , 最大值是 $f(p)$ 与 $f(q)$ 中较大者; 若 $h \notin [p, q]$, 则 $f(p)$ 与 $f(q)$ 中较小者为最小值, 较大者为最大值, 即最值在区间的端点取得.

对于 $f(x) \geq 0$ 在区间 $[p, q]$ 上恒成立问题, 通常转化为 $f(x)$ 在 $[p, q]$ 上的最值问题, 结合解不等式(组)去解决.

【标注】【题型】题型：二次函数最值

16. ★★

已知抛物线 $y = -x^2 + bx + 2 - b$, 在自变量 x 的值满足 $-1 \leq x \leq 2$ 的情况下, 函数有最大值 m , 则 m 的最小值是 _____.

【答案】 1

【解析】 $y = -x^2 + bx + 2 - b = -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} - b + 2$

$$= -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(b-2)^2 + 1,$$

① $-1 \leq \frac{b}{2} \leq 2$ 时,

即 $-2 \leq b \leq 4$,

此时, $x = \frac{b}{2}$, $y_{\max} = \frac{1}{4}(b-2)^2 + 1 \geq 1$, $m_{\min} = 1$.

② $\frac{b}{2} \leq -1$ 时, $b \leq -2$, $x = -1$ 时,

$$m = -1 - b + 2 - b = -2b + 1, \quad b = -2, \quad m_{\min} = 5.$$

③ $b \geq -2$ 时, $b \geq 4$, $x = 2$ 时,

$$m = -4 + 2b + 2 - b = b - 2, \quad b = 4, \quad m_{\min} = 2.$$

$\therefore m$ 的最小值为 1.

【标注】【知识点】定区间动轴函数的最值问题

17. 2020~2021 学年 11 月浙江台州路桥区东方理想学校初三上学期月考第 16 题 5 分 ★★★★★

已知函数 $y = x^2 + bx + 3b$ (b 为常数) 的图象不经过第三象限, 当 $-6 \leq x \leq 2$ 时, 函数的最大值与最小值之差为 25, 求 b 的值是 _____.

【答案】 2 或 6

【解析】 函数 $y = x^2 + bx + 3b = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 3b - \frac{b^2}{4}$ 图象不经第三象限,

当对称轴 $x = -\frac{b}{2}$ 在 x 轴正半轴上时,

$$x = -\frac{b}{2} > 0, \text{ 即 } b < 0,$$

要使 $y = x^2 + bx + 3b$ 不经过第三象限,

则 $3b \geq 0$, 即 $b \geq 0$, 相互矛盾,

$\therefore$ 这种情况不存在, 即 $x = -\frac{b}{2}$ 在 x 轴负半轴, 要使 $y = x^2 + bx + 3b$ 不经过第三象限,

$\therefore y = x^2 + bx + 3b$ 与 x 轴只有一个交点或没有交点,

$\therefore y = 0$ 时, $x^2 + bx + 3b = 0$ 关于 x 方程有两个相等实数根或没有根,

$$\text{即 } \Delta = b^2 - 4 \times 1 \times 3b = b^2 - 12b \leq 0,$$

$$\therefore 0 \leq b \leq 12,$$

当 $-\frac{b}{2} \leq -6$ 时, 即 $b \geq 12$,

$$\therefore b = 12, \quad y = x^2 + 12x + 36,$$

若 $-6 \leq x \leq 2$ 时, 函数最大值为 $2^2 + 12 \times 2 + 36 = 64$,

函数最小值为 $(-6)^2 + 12 \times (-6) + 36 = 0$,

最大值与最小值之差为 $64 - 0 = 64 \neq 25$, 不符合题意,

当 $-6 < -\frac{b}{2} < -2$, 即 $4 < b < 12$.

若 $-6 \leq x \leq 2$ 时, 对称轴 $x = -\frac{b}{2}$ 更靠近 $x = -6$,

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时, 函数取最大值为 $4 + 2b + 3b = 5b + 4$,

当 $x = -\frac{b}{2}$ 时, 函数取最小值为 $3b - \frac{b^2}{4}$,

$$\therefore (5b + 4) \left(3b - \frac{b^2}{4}\right) = 25,$$

$$\therefore \frac{b^2}{4} + 2b - 21 = 0, \quad b^2 + 8b - 84 = 0,$$

$$\therefore (b + 14)(b - 6) = 0,$$

$$\therefore b = -14 \text{ 或 } b = 6,$$

又 $4 < b < 12$,

$\therefore b = 6$,

当 $-2 \leq -\frac{b}{2} \leq 0$ 时, $0 \leq b \leq 4$,

若 $-6 \leq x \leq 2$ 时, 对称轴 $x = -\frac{b}{2}$ 更靠近 $x = 2$,

$\therefore$ 当 $x = -6$ 时, 函数取最大值为 $36 - 6b + 3b = 36 - 3b$,

当 $x = -\frac{b}{2}$ 时, 函数取最小值为 $3b - \frac{b^2}{4}$,

$\therefore (36 - 3b) \left(3b - \frac{b^2}{4} \right) = 25$,

$\therefore \frac{b^2}{4} - 3b - 3b + 36 = 25$, $b^2 - 24b + 44 = 0$,

$\therefore (b - 2)(b - 22) = 0$,

$\therefore b = 2$ 或 $b = 22$,

又 $0 \leq b \leq 4$,

$\therefore b = 2$.

综上所述: $b = 2$ 或 $b = 6$.

【标注】【思想】分类讨论思想

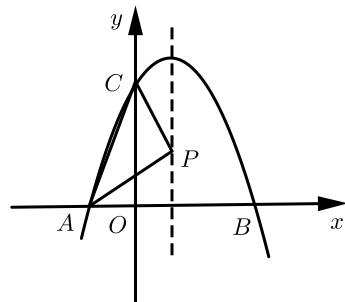
【能力】推理论证能力

【知识点】二次函数顶点式

独步天下练习2

18. 2021年天津西青区初三中考二模第25题10分 ★★★

如图, 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$.



(1) 求抛物线的解析式和顶点坐标.

(2) 点 P 是抛物线对称轴上的一个动点, 当 $\triangle PAC$ 周长最小时, 求点 P 的坐标.

(3) 将抛物线沿 x 轴平移 h ($h > 0$) 个单位, 平移后的抛物线满足: 当 $1 \leq x \leq 3$ 时, y 有最大值是 2, 求 h 的值.

【答案】 (1) $y = -(x - 1)^2 + 4$; $(1, 4)$.

(2) $(1, 2)$.

(3) $\sqrt{2}$ 或 $2 + \sqrt{2}$.

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$,

$$\therefore \begin{cases} -(-1)^2 + (-1)b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}.$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$.

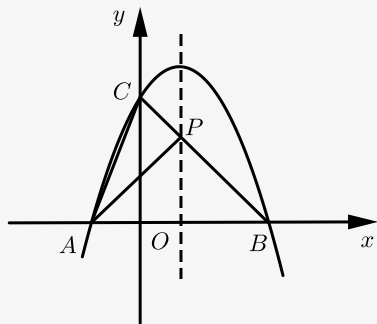
$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(1, 4)$.

(2) 当 $y = 0$ 时, $-x^2 + 2x + 3 = 0$, 解得 $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

$\therefore$ 点 B 坐标为 $(3, 0)$.

如图, 连接 BC , 交抛物线对称轴于点 P , 此时 $\triangle PAC$ 的周长最小.



设直线 BC 的解析式为 $y = kx + m (k \neq 0)$,

$$\text{则有} \begin{cases} 3k + m = 0 \\ m = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ m = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -x + 3$.

$$\therefore \text{抛物线为 } y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$\therefore$ 其对称轴为直线 $x = 1$.

$$\therefore \text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = -1 + 3 = 2,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1, 2)$.

(3) $\because$ 平移后的抛物线满足: 当 $1 \leq x \leq 3$ 时, y 有最大值是 2, 而原抛物线有 $y_{\text{最大}} = 4$

,

$\therefore$ 在 $1 \leq x \leq 3$ 范围的图象上不包括顶点,

即平移后的抛物线在 $1 \leq x \leq 3$ 范围的图象在对称轴的左侧或右侧.

① 若将原抛物线沿 x 轴向左平移 h 个单位 ($h > 0$), 平移后的抛物线解析式为

$$y = -(x-1+h)^2 + 4.$$

$\therefore$ 在 $1 \leq x \leq 3$ 范围的图象在对称轴直线 $x = 1-h$ 的右侧, 即 $1-h < 1$.

$\therefore h > 0$, 此时 y 随 x 的增大而减小.

$$\therefore \text{当 } x = 1 \text{ 时, } y_{\text{最大}} = -(1-1+h)^2 + 4 = 2,$$

$$\therefore h = \pm\sqrt{2}.$$

$\therefore h > 0$,

$$\therefore h = \sqrt{2}.$$

②若将原抛物线沿 x 轴向右平移 h 个单位，平移后的抛物线解析式为

$$y = -(x - 1 - h)^2 + 4.$$

$\therefore$ 在 $1 \leq x \leq 3$ 范围的图象在对称轴直线 $x = 1 + h$ 的左侧，即 $1 + h > 3$.

$\therefore h > 2$ ，此时 y 随 x 的增大而增大.

$$\therefore \text{当 } x = 3 \text{ 时, } y_{\text{最大}} = -(3 - 1 - h)^2 + 4 = 2,$$

$$\therefore h = 2 \pm \sqrt{2}.$$

$$\therefore h > 2,$$

$$\therefore h = 2 + \sqrt{2}.$$

综上所述， h 的值为 $\sqrt{2}$ 或 $2 + \sqrt{2}$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

四、动轴动区间

练习7

19. 2020~2021学年10月湖北武汉江岸区武汉二中广雅中学初三上学期周测B卷第16题3分 ★★★

已知二次函数 $y = x^2 + bx + b^2$ ，当 $b \leq x \leq b + 3$ 时，函数最小值为 21，则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -4或 $\sqrt{7}$

【解析】 ①若 $-\frac{b}{2} \leq b$ ，即 $\frac{3}{2}b \geq 0$ ， $b \geq 0$ ，

$$\text{当 } x = b \text{ 时, } y_{\min} = 3b^2 = 21,$$

$$\therefore b = \pm\sqrt{7}, \text{ 而 } b \geq 0,$$

$$\therefore b = \sqrt{7}.$$

$$\text{② } b < -\frac{b}{2} < b + 3,$$

$$\therefore b < 0, -\frac{3}{2}b < 3, b > -2,$$

$$\therefore -2 < b < 0,$$

$$x = -\frac{b}{2} \text{ 时, } y_{\min} = \frac{3}{4}b^2 = 21, b = \pm 2\sqrt{7} \text{ (舍)}.$$

$$\text{③若 } -\frac{b}{2} \geq b + 3, \text{ 即 } -\frac{3}{2}b \geq 3,$$

$$\therefore b \leq -2,$$

$$\text{当 } x = b + 3 \text{ 时, } y_{\min} = (b + 3)^2 + b(b + 3) + b^2 = 3b^2 + 9b + 9 = 21,$$

$$\therefore b^2 + 3b - 4 = 0, (b + 4)(b - 1) = 0, b = -4;$$

综上： $b = -4$ 或 $\sqrt{7}$.

【标注】【知识点】动轴动区间函数的最值问题

20. ★★★

对于题目“二次函数 $y = \frac{3}{4}(x-m)^2 + m$ ，当 $2m-3 \leq x \leq 2m$ 时， y 的最小值是 1，求 m 的值。”甲的结果是 $m = 1$ ，乙的结果是 $m = -2$ ，则（ ）。

- A. 甲的结果正确
B. 乙的结果正确
C. 甲、乙的结果合在一起不正确
D. 甲、乙的结果合在一起才正确

【答案】D

【解析】当 $2m-3 \geq m$ ，即 $m \geq 3$ 时， $\frac{3}{4}(2m-3-m)^2 + m = 1$ ，

$\therefore 3m^2 - 14m + 23 = 0$ ，无解。

当 $2m-3 \leq m \leq 2m$ ，即 $0 \leq m \leq 3$ 时， $m = 1$ ，

当 $2m \leq m$ ，即 $m \leq 0$ 时， $\frac{3}{4}(2m-m)^2 + m = 1$ ，

$\therefore m = -2$ ，

综上所述： $m = 1$ 或 $m = -2$ 。

【标注】【题型】二次函数给定范围求最值

练习8

21. 2016年天津河西区初三中考二模第25题10分 ★★★★★

已知二次函数 $y = x^2 + 2bx + c$ (b, c 为常数)。

(1) 当 $b = 1, c = -3$ 时，求二次函数在 $-2 \leq x \leq 2$ 上的最小值。

(2) 当 $c = 3$ 时，求二次函数在 $0 \leq x \leq 4$ 上的最小值。

(3) 当 $c = 4b^2$ 时，若在自变量 x 的值满足 $2b \leq x \leq 2b+3$ 的情况下，与其对应的函数值 y 的最小值为 21，求此时二次函数的解析式。

【答案】(1) -4

(2) 若 $-b < 0$ ， y 有最小值 3，

若 $0 \leq -b \leq 4$ ， y 有最小值 $-b^2 + 3$ ，

若 $-b > 4$ ， y 有最小值 $19 + 8b$ 。

(3) $y = x^2 + \sqrt{7}x + 7$ 或 $y = x^2 - 4x + 16$

【解析】(1) 当 $b = 1, c = -3$ 时，二次函数的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$ ，即 $y = (x-1)^2 - 4$ 。

$\therefore x = -1$ 在 $-2 \leq x \leq 2$ 的范围内，此时二次函数取得最小值 -4。

(2) $y = x^2 + 2bx + 3$ 的对称轴是 $x = -b$ ，

①若 $-b < 0$, 即 $b > 0$ 时, 当 $x = 0$ 时, y 有最小值 3 ,

②若 $0 \leq -b \leq 4$, 即 $-4 \leq b \leq 0$ 时, 当 $x = -b$ 时, y 有最小值 $-b^2 + 3$,

③若 $-b > 4$, 即 $b < -4$ 时, 当 $x = 4$ 时, y 有最小值 $19 + 8b$.

(3) 当 $c = 4b^2$ 时, 二次函数的解析式为 $y = x^2 + 2bx + 4b^2$.

它的图像时开口向上, 对称轴为 $x = -b$ 的抛物线,

①若 $-b < 2b$, 即 $b > 0$,

在自变量 x 的值满足 $2b \leq x \leq 2b + 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x = 2b$ 时, $y = (2b)^2 + 2b \cdot 2b + (2b)^2 = 12b^2$ 为最小值 .

$\therefore 12b^2 = 21$, 解得 $b_1 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ (舍) , $b_2 = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

②若 $2b \leq -b \leq 2b + 3$, 即 $-1 \leq b \leq 0$,

当 $x = -b$ 时, 代入得 $y = 3b^2$ 为最小值 .

$\therefore 3b^2 = 21$, 解得 $b_1 = -\sqrt{7}$ (舍) , $b_2 = \sqrt{7}$ (舍) .

③若 $-b > 2b + 3$, 即 $b < -1$,

在自变量 x 的值满足 $2b \leq x \leq 2b + 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x = 2b + 3$ 时, 代入得 $y = 12b^2 + 18b + 9$ 为最小值 .

$\therefore 12b^2 + 18b + 9 = 21$, 解得 $b_1 = \frac{1}{2}$ (舍) , $b_2 = -2$.

综上所述, $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 或 $b = -2$.

$\therefore$ 此时二次函数的解析式为 $y = x^2 + \sqrt{7}x + 7$ 或 $y = x^2 - 4x + 16$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

【思想】分类讨论思想

22. 2019~2020学年浙江杭州江干区杭州市采荷实验学校初三上学期单元测试《二次函数》第19题

★★★

已知二次函数 $y = x^2 + mx + n$ (m, n 为常数) .

(1) 若 $m = -2$, $n = -4$, 求二次函数的最小值 .

(2) 若 $n = 3$, 该二次函数的图象与直线 $y = 1$ 只有一个公共点, 求 m 的值 .

(3) 若 $n = m^2$, 且 $3m + 4 < 0$, 当 x 满足 $m \leq x \leq m + 2$ 时, y 有最小值 13 , 求此二次函数的解析式 .

【答案】 (1) -5.

(2) $\pm 2\sqrt{2}$.

(3) $y = x^2 - 3x + 9$.

【解析】(1) 当 $m = -2$, $n = -4$ 时, $y = x^2 - 2x - 4 = (x - 1)^2 - 5$

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, y 最小值 $= -5$.

(2) 当 $n = 3$ 时, $y = x^2 + mx + 3$, 令 $y = 1$, 则 $x^2 + mx + 3 = 1$, 由题意知,

$x^2 + mx + 3 = 1$ 有两个相等的实数根, 则 $\Delta = m^2 - 8 = 0$,

$\therefore m = \pm 2\sqrt{2}$.

(3) 由 $3m + 4 < 0$, 可知 $m < -\frac{4}{3}$,

$\therefore m \leq x \leq m + 2 < \frac{2}{3}$, 抛物线 $y = x^2 + mx + m^2$ 的对称轴为 $x = -\frac{m}{2}$,

$\therefore m < -\frac{4}{3}$

$\therefore -\frac{m}{2} > \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 对称轴为 $x = -\frac{m}{2} > \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 在 $m \leq x \leq m + 2$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x = m + 2$, y 有最小值为 13,

$\therefore (m + 2)^2 + m(m + 2) + m^2 = 13$, 即 $m^2 + 2m - 3 = 0$, 解得 $m = 1$ 或 $m = -3$,

而 $m < -\frac{4}{3}$,

$\therefore m = -3$, 此时, $y = x^2 - 3x + 9$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

【知识点】二次函数与坐标轴交点

【能力】运算能力

23. 2019年辽宁大连初三中考一模第26题12分 ★★★

定义: 将函数 l 的图象绕点 $P(m, 0)$ 旋转 180° , 得到新的函数 l' 的图象, 我们称函数 l' 是函数 l 关于点 P 的相关函数.

例如: 当 $m = 1$ 时, 函数 $y = (x + 1)^2 + 5$ 关于点 $P(1, 0)$ 的相关函数为 $y = -(x - 3)^2 - 5$.

(1) 当 $m = 0$.

① 一次函数 $y = x - 1$ 关于点 P 的相关函数为 _____.

② 点 $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{8}\right)$ 在二次函数 $y = -ax^2 - ax + 1 (a \neq 0)$ 关于点 P 的相关函数的图象上, 求 a 的值.

(2) 函数 $y = (x - 1)^2 + 2$ 关于点 P 的相关函数是 $y = -(x + 3)^2 - 2$, 则 $m =$ _____.

(3) 当 $m - 1 \leq x \leq m + 2$ 时, 函数 $y = x^2 - mx - \frac{1}{2}m^2$ 关于点 $P(m, 0)$ 的相关函数的最大值为 6, 求 m 的值.

【答案】(1) ① $y = x + 1$

② $a = \frac{1}{2}$.

(2) -1

$$(3) 1 - \sqrt{15} \text{ 或 } 2\sqrt{2}.$$

【解析】(1) ① 当 $m = 0$ 时, $P(0, 0)$,

将一次函数 $y = x - 1$ 绕 $P(0, 0)$ 旋转 180° ,

得到新的函数与 $y = x - 1$ 平行,

且在 y 轴的距离与 $y = x - 1$ 在 y 轴截距刚好互为相反数,

$\therefore$ 新函数解析式为 $y = x + 1$,

$\therefore$ 一次函数 $y = x - 1$ 关于点 P 的相关函数为 $y = x + 1$.

$$\textcircled{2} \because y = -ax^2 - ax + 1 = -a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 + \frac{1}{4}a,$$

$$\therefore y = -ax^2 - ax + 1 \text{ 关于点 } P(0, 0) \text{ 的相关函数为 } y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{4}a,$$

$$\because \text{点 } A\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{8}\right) \text{ 在函数 } y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{4}a \text{ 的图象上,}$$

$$\therefore -\frac{9}{8} = a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{4}a,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \text{ 函数 } y = (x - 1)^2 + 2, \text{ 顶点为 } (1, 2),$$

$$\text{函数 } y = -(x + 3)^2 - 2, \text{ 顶点为 } (-3, -2),$$

点 $(1, 2)$ 关于点 $P(m, 0)$ 的对称点为点 $(-3, -2)$,

$$\therefore m = \frac{1 + (-3)}{2} = -1.$$

$$(3) \because y = x^2 - mx - \frac{1}{2}m^2 = \left(x - \frac{1}{2}m\right)^2 - \frac{3}{4}m^2,$$

$$\therefore y = x^2 - mx - \frac{1}{2}m^2 \text{ 关于点 } P(m, 0) \text{ 的相关函数 } y = -\left(x - \frac{3}{2}m\right)^2 + \frac{3}{4}m^2.$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \frac{3}{2}m \leq m - 1, \text{ 即 } m \leq -2 \text{ 时, 当 } x = m - 1 \text{ 时, } y \text{ 有最大值是 } 6,$$

$$\therefore -\left(m - 1 - \frac{3}{2}m\right)^2 + \frac{3}{4}m^2 = 6,$$

$$\therefore m_1 = 1 - \sqrt{15}, m_2 = 1 + \sqrt{15} \text{ (不符合题意, 舍去)}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } m - 1 < \frac{3}{2}m \leq m + 2, \text{ 即 } -2 < m \leq 4 \text{ 时, 当 } x = \frac{3}{2}m \text{ 时, } y \text{ 有最大值是 } 6,$$

$$\therefore \frac{3}{4}m^2 = 6,$$

$$\therefore m_1 = 2\sqrt{2}, m_2 = -2\sqrt{2} \text{ (不符合题意, 舍去)}.$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } \frac{3}{2}m > m + 2, \text{ 即 } m > 4 \text{ 时, 当 } x = m + 2 \text{ 时, } y \text{ 有最大值是 } 6,$$

$$\therefore -\left(m + 2 - \frac{3}{2}m\right)^2 + \frac{3}{4}m^2 = 6,$$

$$\therefore m = -2 \pm 2\sqrt{6} \text{ (不符合题意, 舍去)}.$$

综上, m 的值是 $1 - \sqrt{15}$ 或 $2\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】与函数有关的新定义

